De eerste acht bladzijden van het Mechanica-script van Wassenberg

De notatie die Wassenberg gebruikt, komt overeen met de notatie uit het in 1960 voorgeschreven leerboek (op het gymnasium Reindersma en Van Lohuizen, Natuurkunde voor de tweede ronde (eerste druk 1939 !) en later Schweers en Van Vianen, Natuurkunde op corpusculaire grondslag) Deze notatie zocht op geen enkele manier aansluiting met de corresponderende notatie zoals die in de wiskundeboeken gebruikelijk is/was.

Het scriptonderdeel “kinematica van het massapunt” omvat 107 bladzijden; een betere benaming zou zijn “beschrijvende mechanica” . Alles wat er in dit onderdeel gebeurt is louter van wiskundige aard. In de wiskunde zou je dit onderdeel “ Eigenschappen van ruimtelijke krommen” noemen.

Voor de duidelijkheid zal ik enkele begrippen herhalen/vastleggen.
Uitgangspunt is de beweging van een massapunt langs een rechte lijn. De baan van het massapunt is een interval van de rechte lijn. Denk hierbij aan de vertikale worp. De baan is het interval $[0m, h]$, waarbij h = de hoogte boven het aardoppervlak die door het massapunt bereikt wordt. Deze baan wordt tweemaal beschreven: een keer als het massapunt omhooggaat, een keer als het massapunt omlaaggaat.

Het is duidelijk dat er voor de beschrijving van de beweging van het massapunt een assenstelsel (x-as) langs de rechte baan gekozen wordt. De tijdstippen die voor de beweging relevant zijn, liggen in een interval I, een deelverzameling van de reële getallen **R**

Een plaatsfunctie x van een massapunt is een afbeelding van het tijdsinterval $I = [0s, t_{einde}] \subset$ **R** naar de eendimensionale Euclidische ruimte **R**.
Wiskundig wordt de tijd t de parameter van de plaatsfunctie genoemd.
Beschouw nu een massapunt met plaatsfunctie x. Die functie is dus gegeven.
De plaats van het massapunt op tijdstip $t \in I$ is $x(t)$. $x(t)$ is een baancoördinaat.
De baan van het massapunt := $\{x(t) \in \mathbf{R} \mid t \in I\}$
De verplaatsing van het massapunt in het tijdsinterval $[t_1, t_2]$ is $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$.
(Wassenberg gebruikt op pag. 8, Definitie, het symbool Δs voor de verplaatsing zoals in het toenmalige lesboek; dit is verwarrend en moet vermeden worden. In opmerking c) noemt hij Δx (met de zojuist gegeven definitie) de verplaatsing in het platte vlak. Dat is de correcte manier om een verplaatsing te definiëren)

De door het massapunt afgelegde weg op het tijdstip $t \in I$ is het aantal meter $s(t)$ dat door het massapunt gemeten langs de baan wordt <u>afgelegd</u> als het massapunt van $x(0)$ naar $x(t)$ beweegt.
De afgelegde weg functie s is een afbeelding van het interval $I = [0s, t_{einde}] \subset$ **R** op het interval $J := \{s(t) \in \mathbf{R} \mid t \in I\} \subset \mathbf{R}$.
De afgelegde weg op het tijdstip t wordt genoteerd door $s(t)$; deze is in het algemeen geen baancoördinaat.
De door het massapunt afgelegde weg in het tijdsinterval $[t_1, t_2]$ is $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$.
(Wassenberg noemt Δs de verplaatsing langs de baan; pag. 8, opmerking b)
De definitie van de afgelegde weg is zeer beeldend, maar intuïtief.

Als we ervan uitgaan dat het massapunt nooit geparkeerd wordt (een moment stilstaan mag), dan is de afgelegde weg functie s monotoon stijgend, d.w.z. als $t_1 < t_2$ met t_1 , $t_2 \in I$, dan geldt $s(t_1) < s(t_2)$ met $s(t_1), s(t_2) \in J$.

Dat betekent dat de functie s het tijdsinterval I op het plaatsinterval J afbeeldt en omkeerbaar is.
Omkeerbaar betekent: er bestaat een functie ψ van J op I zodat $\psi(s(t)) = t$ voor alle $t \in I$.
De omkeerfunctie beeldt het interval J weer op het interval I af.
Via s ga je van I naar J en met ψ ga je van J naar I en je komt dan weer uit in het vertrekpunt t .
(Denk hierbij aan de klok in de auto en de kilometerteller ; de klok geeft de tijd t aan en de kilometerteller de bijbehorende afgelegde weg $s(t)$; deze informatie op zich is onvoldoende om de plaats van de auto te kennen. I is de verzameling van alle klokstanden; J is de verzameling van alle kilometertellerstanden)

Wassenberg behandelt de afgelegde weg functie s steeds als een coördinaat langs de baan, op het niveau van een plaatsfunctie.

De functie s is positief (alleen $s(t=0\,s) = 0\,m$) en monotoon stijgend, dus $\frac{ds}{dt} \geq 0$.

Op pag. 105 definieert hij als voorbeeld van een afgelegde weg functie $s(t) = 5t^7 - 8t^3 + 5t^2 - t$
Deze functie is echter geen goed voorbeeld, want de functie kan negatief zijn en is niet monotoon stijgend.
De afgelegde weg functie heeft geen vectorkarakter, ook niet als het gaat om de kromlijnige beweging.
Wassenberg gebruikte het boek Grimsehl, Lehrbuch der Physik, Band 1, editie 1954. In ieder geval kwam hij niet op het idee de tijd t en de afgelegde weg s als twee gelijkwaardige parameters voor de plaatsfunctie te zien. Grimsehl gaf daartoe geen aanleiding.
Naast Kronig heeft het boek van Grimsehl een geweldige invloed op zijn lesmateriaal gehad.

De parameter $s \in J$ kan dus net zo goed als de tijd $t \in I$ gebruikt worden om een plaatsfunctie te definiëren.
De plaatsfunctie X met parameter s wordt gedefinieerd als volgt: $X(s(t)) := x(t)$
De baan $\{X(s) \in \mathbf{R} \mid s \in J\}$ is dus hetzelfde als de baan $\{x(t) \in \mathbf{R} \mid t \in I\}$.
Door de manier waarop in dit geval de afgelegde weg functie $s(t)$ gebruikt wordt, wordt deze functie in de wiskunde een parametertransformatie genoemd.

Opmerking c, pag. 8: Wassenberg beweert dat bij een rechtlijnige beweging $\Delta x = \Delta s$

Deze opmerking is niet juist en leidt tot een groot misverstand over het begrip afgelegde weg.

We lichten deze bewering van Wassenberg toe voor de vertikale worp.
We maken, net zo als Wassenberg, gebruik van het intuïtieve begrip “ afgelegde weg”.

Voor de beweging omhoog ($0 \leq t \leq t_{top}$) geldt $s(t) = x(t)$

Voor de beweging omlaag ($t_{top} \leq t \leq 2t_{top}$) geldt $s(t) + x(t) = 2h$ (teken een plaatje)

Voor de omlaaggaande beweging geldt $\Delta s = -\Delta x$
Het is duidelijk dat voor de omlaaggaande beweging de bewering van Wassenberg niet juist is.

Er geldt wel steeds $\frac{\Delta s}{\Delta t} > 0$.

Je kunt de twee identiteiten differentiëren. Dat levert:

Voor de omhooggaande beweging : $\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}$ met $\frac{dx}{dt} \geq 0$

Voor de omlaaggaande beweging : $\frac{ds}{dt} = -\frac{dx}{dt}$ met $\frac{dx}{dt} \leq 0$

In het geval van de vertikale worp geldt voor de afgelegde weg functie *s* wel altijd: $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{dx}{dt}\right|$

We zullen in alle andere gevallen dit als definitie van de afgelegde weg functie *s* nemen.
Je schrijft dan $\frac{ds}{dt} := \left|\frac{dx}{dt}\right|$

Die dubbele punt geeft aan dat hier sprake is van een definitie van $\frac{ds}{dt}$.

Je kunt laten zien dat voor de vertikale worp deze abstracte definitie overeenkomt met de intuïtieve definitie.